Introduzione sintetica alla geometria razionale

Terminologia di base

- **Enti primitivi**: non vengono definiti esplicitamente, lo sono implicitamente attraverso gli assiomi. Sono i **punti** (lettere maiuscole A, B, C, …) le **rette** (r, s, t, …), i **piani** (α, β, γ, …) lo **spazio** $\mathcal{S}$.
- **Assiomi o Postulati** = relazioni tra gli enti primitivi che li definiscono implicitamente e che vengono assunte come vere
  Nella trattazione euclidea si distingueva tra assioma (verità indubitabile di origine logico-insiemistica come *il tutto è maggiore della parte*) e postulato (verità di origine geometrica ammessa come vera). In termini moderni la distinzione non esiste più.
  Il processo di astrazione della geometria consiste proprio nell'affermare (*assumere come vere*) alcune proprietà generali degli enti primitivi (che vengono affermate a partire dalla *geometria in senso fisico*) e nel dedurre tutte le altre proprietà dello spazio da questo numero ridotto di verità generali.
- **Caratteristiche dei postulati** con che criterio si scelgono? Quanti devono essere? Quali sono le relazioni tra essi?
  Correttezza sintattica: i postulati devono essere costruiti rispettando le regole del linguaggio utilizzato; nel nostro caso la logica delle proposizioni e la teoria degli insiemi.
  Non contraddittorietà: i postulati non possono essere in contrasto tra loro visto che li si usa insieme per ricavare altre verità e in logica si dimostra che *se si ammette anche una sola contraddizione si può dimostrare qualsiasi proposizione (compresa la sua negazione)*. Si usa dire che i postulati devono essere *consistenti*.
  Indipendenza: i postulati non devono dipendere nemmeno parzialmente tra loro; se si trova una dipendenza parziale lo si riformula in maniera di renderlo indipendente. Per esempio il famoso postulato di *unicità della parallela* afferma solo la unicità perché l'esistenza è dimostrabile.
  Completezza: il sistema di assiomi deve consentire di costruire una teoria in cui si dimostri tutto ciò che si vuol dimostrare tenendo presente che meno assiomi si danno e più la teoria è generale; man mano che si aggiungono assiomi il campo della teoria si restringe.
- **Definizione esplicita** : viene introdotto un nuovo termine attraverso l'uso di termini già definiti eventualmente sfruttando la verità di postulati o di precedenti dimostrazioni.
- **La verità geometrica**: ha sempre natura ipotetica; non si afferma la verità di una tesi ma un legame necessario tra ipotesi e tesi (*la tesi è vera se lo è l'ipotesi* nel senso che dalla negazione della tesi deve seguire la negazione dell'ipotesi – la proposizione contronominale è equivalente alla diretta)
  Teorema: conseguenza logica dei postulati e/o di teoremi precedenti con forma H⇒T che significa *se ammetto l'ipotesi e dimostro che l'ipotesi implica la tesi devo ammettere la tesi*
  Corollario: teorema che si deriva immediatamente da un teorema precedente
  Lemma: teorema intermedio che serve prevalentemente a dimostrare un altro teorema più importante
- **Relazioni tra gli enti primitivi:** $A \in r \subset \alpha \subset \mathcal{S}$. In termini insiemistici ciò significa che gli elementi dello spazio sono i punti mentre rette e piani sono sottoinsiemi dello spazio fatti di punti.

Gli assiomi della geometria euclidea

Gli assiomi vengono ripartiti in gruppi a seconda delle loro caratteristiche generali (di cosa si occupano).

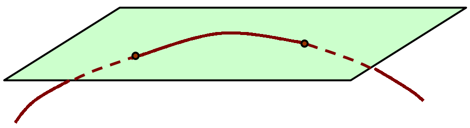
Assiomi di appartenenza

Stabiliscono le relazioni reciproche tra i diversi enti

1A. per due punti passa una e una sola retta e su una retta esistono almeno due punti
$\forall(A,B) \Rightarrow \exists!\ r \mid A\in r \wedge B\in r$
$\forall\ r \Rightarrow \exists(A,B) \mid A\in r \wedge B \in r$
Useremo il simbolo r_{AB} per indicare la retta unica che passa per A e B; la retta ha 1 sola dimensione definita da 1 coppia di punti

2A. Esistono almeno 3 punti tra loro non allineati; tre punti non allineati definiscono univocamente un piano e dato un piano esso contiene almeno tre punti.
$\forall r_{AB} \Rightarrow \exists C \mid C\notin r_{AB}$
$\forall(A,B,C) \mid C\notin r_{AB} \Rightarrow \exists!\ \alpha \mid \{A,B,C\}\subseteq\alpha$;
il piano ha 2 dimensioni (si distingue dalla retta)

3A. se due punti stanno su un piano ci stanno anche tutti i punti della retta (si dice che la retta giace nel piano); questo assioma ci dice che le rette sono sottoinsiemi propri del piano o anche che non esistono rette che, dopo aver tagliato un piano in due punti, escono da esso come nella figura qui a lato.



$\forall(A,B) \subset\alpha \Rightarrow r_{AB} \subset\alpha$

4A. il piano contiene infiniti punti. Corollario: il piano contiene infinite rette
$\forall(A,B,C) \mid \{A,B,C\}\subseteq \alpha \Rightarrow \exists D \mid D\in\alpha$

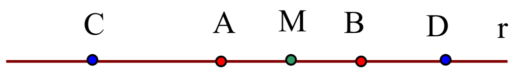
5A. Esistono almeno 4 punti nello spazio perché per ogni piano c'è almeno un punto fuori di esso; inoltre lo spazio ha almeno 3 dimensioni e poiché in un piano ci sono infiniti punti da qui arriviamo facilmente al fatto che esistono infiniti piani. Fin qui non è necessario ammettere che la retta abbia infiniti punti ma dovremo farlo implicitamente tra breve.
$\forall\alpha \Rightarrow \exists A \mid A\notin\alpha$

Assiomi di ordinamento

Richiedono alla retta alcune proprietà ben note che si condensano dicendo che *la retta è un insieme totalmente ordinato, illimitato e denso*.

Si consiglia di riflettere sui due concetti di denso e illimitato; entrambi richiedono un insieme ordinato, entrambi richiedono insiemi infiniti ma ci parlano di due proprietà diverse dell'infinito: uno è un infinito in estensione, l'altro è un infinito come ravvicinamento.

1O. Sulla retta viene stabilita una *relazione di ordine totale stretto* cioè per i punti distinti della retta vale una relazione (che chiameremo di *venir prima* o *precedere* e indicheremo con $\prec$) che è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva.



Relazione di ordine totale significa richiedere che tutti i punti dell'insieme la soddisfano e per questo deve valere una proprietà di *tricotomia* (divisione in 3 possibilità): presi due punti A e B accade che A e B coincidono oppure si verifica una sola delle due condizioni $A\prec B$ e $B\prec A$. La relazione $B\prec A$ (B precede A) sarà anche scritta $A\succ B$ (A segue B).

2O. La retta è un insieme *illimitato in entrambi i versi* dell'ordinamento e cioè $\forall(A,B) \wedge A\prec B \Rightarrow \exists(C,D) \mid C \prec A$ e $B \prec D$. Da questo assioma discende che la retta ha infiniti punti perché la sua applicazione genera sempre 2 nuovi punti.

3O. La retta è un *insieme denso* e cioè $\forall(A,B) \wedge A \prec B \Rightarrow \exists M \mid A \prec M \prec B$ cioè presi due punti sulla retta ne esiste sempre uno intermedio. Questa proprietà è in realtà dimostrabile utilizzando il postulato di partizione del piano
Da questi postulati si dimostra un teorema che viene invece solitamente enunciato come postulato.

Teorema : Un punto appartiene ad infinite rette

Definizioni: fascio di rette, semiretta (Vr), segmento AB, segmenti consecutivi, segmenti adiacenti, figura convessa, poligonale

4O. Partizione del piano: la retta divide il piano in due parti (semipiani) entrambe convesse
Da questo postulato si può derivare come teorema il fatto che una retta che tagli un lato di un triangolo taglia sempre uno degli altri lati o entrambi nel vertice comune, si può inoltre far discendere la densità della retta.
Si preferisce solitamente enunciare il postulato in una forma più ricca e stringente. Precisamente:
Una retta divide il piano in due parti separate e convesse; il segmento che unisce punti appartenenti ai due semipiani taglia le retta in un punto.
Quando ci si riferisce al semipiano lo si considera chiuso (cioè comprensivo della retta che lo genera).

$\forall\alpha, \forall r, r\subset\alpha \Rightarrow \exists! (\alpha_1,\alpha_2)|$
$\forall(A_1,B_1), A_1\in\alpha_1 \wedge B_1\in\alpha_1 \Rightarrow A_1B_1\subset\alpha_1$ convessità di α_1
$\forall(A_2,B_2), A_2\in\alpha_2 \wedge B_2\in\alpha_2 \Rightarrow A_2B_2\subset\alpha_2$ convessità di α_2
$\alpha_1\cup\alpha_2\cup r = \alpha$ partizione
$\forall(A_1,A_2), A_1\in\alpha_1 \wedge A_2\in\alpha_2 \Rightarrow \exists R, R\in r | R\in A_1A_2$ intersezione

definizioni : angolo, angolo convesso, angolo piatto, angolo nullo, angolo giro, corda, raggio interno ad un angolo, densità della corda e densità del corrispondente fascio di raggi, verso convenzionale delle rotazioni, triangolo, poligono, angolo interno e angolo esterno, diagonale, angolo consecutivo e segmento adiacente

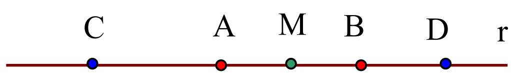
angolo $r\hat{V}s$, angolo piatto π

teorema : il triangolo è una figura convessa

teorema di ordinamento del piano : Le semirette ottenute congiungendo i punti di una retta con un punto esterno ad essa preso come origine si presentano nello stesso ordine dei punti.
Questo teorema, dall'apparenza innocua, serve per stabilire che quando in un triangolo si prende un punto interno ad un lato e lo si unisce con il vertice opposto si ottiene un angolo minore di quello definito dai due vertici del lato. Accade il contrario quando il punto si trova sul prolungamento.
Nel corso delle dimostrazioni questa proprietà viene solitamente dedotta dalla osservazione della figura ma. se si vuole che la dimostrazione non dipenda dalla figura, le affermazioni usate nella dimostrazione vanno a loro volta dimostrate …

Assiomi di congruenza

Si parte dall'idea di *sovrapponibilità mediante un movimento rigido* (concetto fisico e non matematico) e la si definisce attraverso appositi postulati con riferimento ad angoli e segmenti:



1C. La congruenza tra angoli e tra segmenti (simbolo $\cong$) è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica, transitiva)

2C. Su ogni semiretta esiste un solo punto che definisce con l'origine un segmento congruente ad un segmento dato (postulato del trasporto dei segmenti)
Data una semiretta, fissato un verso di rotazione di un sistema di raggi esiste una sola semiretta con la stessa origine che definisce un angolo congruente ad un angolo dato (postulato del trasporto degli angoli).
$\forall Vr, \forall AB \Rightarrow \exists! P, P\in Vr \mid AB \cong VP$
$\forall r\hat{V}s, \forall Pt \Rightarrow \exists! Pu \mid r\hat{V}s \cong t\hat{P}u$
Questi due postulati ci garantiscono il trasporto dei segmenti e degli angoli a nostro piacimento.

3C. La congruenza si conserva durante lo scambio di versi di segmenti ed angoli
$\forall AB \Rightarrow AB \cong BA$
$\forall r\hat{V}s \Rightarrow r\hat{V}s \cong s\hat{V}r$

definizione : lunghezza di un segmento è la classe di equivalenza di segmenti congruenti; ampiezza di un angolo è la classe di equivalenza di angoli congruenti

definizione : addizione di segmenti attraverso i segmenti adiacenti; si possono sommare anche segmenti non adiacenti ma lo si può fare dopo averli trasportati su una medesima retta.

definizione : addizione di angoli attraverso gli angoli consecutivi (vedi nota precedente sui segmenti)

4C. Somme di segmenti adiacenti (o di angoli consecutivi) ordinatamente congruenti sono congruenti
Grazie alla possibilità di trasporto e alla proprietà commutativa la proprietà vale anche per segmenti non adiacenti perché prima di sommarli li si rende tali.

Nota Bene : dopo aver definito la somma ed averne enunciato la proprietà di conservazione, si definisce la sottrazione come operazione inversa (anch'essa gode di una proprietà di conservazione).

definizione : disuguaglianza tra segmenti e tra angoli (sfrutta l'idea di interno ed esterno)

definizione: congruenza di triangoli : due triangoli $A\overset{\Delta}{B}C$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ si dicono congruenti se hanno ordinatamente congruenti i tre lati e i tre angoli (la definizione si estende a tutti i poligoni).

Nota Bene : "ordinatamente" ci ricorda che la congruenza tra elementi del triangolo avviene attraverso corrispondenze, cioè quando si afferma la congruenza tra due lati quella tra gli angoli si deve riferire agli angoli opposti ad essi.

5C. **Primo criterio di congruenza dei triangoli**: due triangoli che hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo compreso sono congruenti

Nota bene: Contrariamente a quanto sta scritto su molti *pessimi* manuali di geometria, si tratta di un postulato e non di un teorema. Con i postulati dati sulla congruenza (segmenti ed angoli) ne serve un altro per poter passare alla congruenza dei poligoni. Da qui in poi si procede per teoremi.
Nel corso delle dimostrazioni di geometria si mettono spesso in relazione tra loro angoli e segmenti come per esempio nel caso di angoli opposti ad un lato in un dato triangolo. Quando si tirano le conclusioni è importante che esse mettano in connessione elementi collegati dalla relazione; nel farlo si parla di elementi *rispettivamente congruenti* volendo dire che la congruenza riguarda coppie di elementi di due figure che si corrispondono. Per questa ragione è bene adottare una certa disciplina nella scelta delle lettere (se A è un vertice chiamare A' quello che gli corrisponde nell'altra figura e così via).

Congruenze tra triangoli

Conseguenze del I criterio

- Angoli adiacenti di angoli congruenti sono congruenti
  - Gli angoli piatti sono tutti congruenti (li indicheremo con π)
  - Gli angoli opposti al vertice sono congruenti
- In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti (dimostrazione per costruzione con applicazioni successive del I criterio)
- Un triangolo con due angoli congruenti è isoscele (dimostrazione simile alla precedente con uso della congruenza di angoli adiacenti)

Teorema: II criterio di congruenza

Enunciato: *Se due triangoli hanno un lato e i due angoli adiacenti rispettivamente congruenti sono congruenti.*

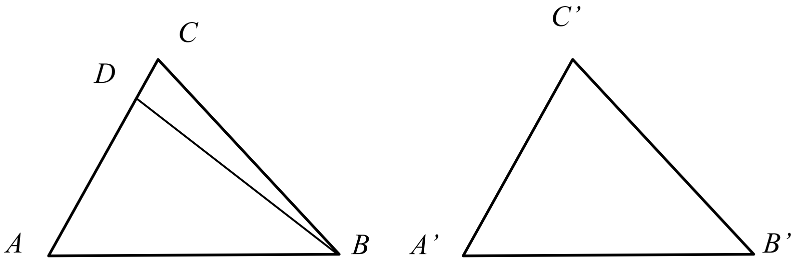
Dati: $A\overset{\Delta}{B}C$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$

Ipotesi: $AB \cong A'B' \wedge C\hat{A}B \cong C'\hat{A'}B' \wedge A\hat{B}C \cong A'\hat{B'}C'$

Tesi: $A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$

Dimostrazione

Costruiamo due triangoli congruenti per agevolare il riconoscimento degli elementi via via presi in esame



La dimostrazione si fa per assurdo negando la tesi e supponendo dunque che $A\overset{\Delta}{B}C \neq A'\overset{\Delta}{B'}C'$

Ma in questo caso deve essere $AC \neq A'C'$ perché se fosse $AC \cong A'C'$ per il primo criterio i due triangoli sarebbero congruenti. Supponiamo che sia dunque $AC > A'C'$ (se fosse minore basterebbe rifare il ragionamento riferendosi al II triangolo invece che al primo). In tal caso esiste D interno ad AC tale che $AD \cong A'C'$. Per il teorema di ordinamento del piano $A\hat{B}D < A\hat{B}C$.

Ma per il I criterio di congruenza si ha che $A\overset{\Delta}{B}D \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$ e dunque $A\hat{B}D \cong A'\hat{B'}C'$

Ma per ipotesi $A\hat{B}C \cong A'\hat{B'}C'$ e per la proprietà transitiva della congruenza $A\hat{B}C \cong A\hat{B}D$ e ciò è assurdo perché uno stesso angolo non può essere contemporaneamente congruente e maggiore di un altro perché ciò significherebbe che un angolo è minore di se stesso. Dunque l'ipotesi fatta che fosse $A\overset{\Delta}{B}C \neq A'\overset{\Delta}{B'}C'$ è sbagliata (assurdo) e dobbiamo ammettere la tesi che avevamo negato.

Teorema: III criterio di congruenza

Enunciato: *Se due triangoli hanno tre lati rispettivamente congruenti sono congruenti.*

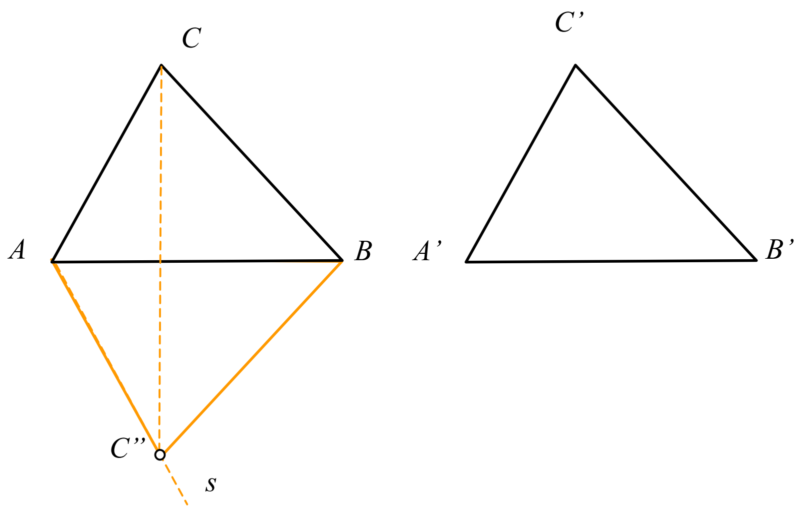
Dati: $A\overset{\Delta}{B}C$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$

Ipotesi: $AB \cong A'B' \wedge AC \cong A'C' \wedge CB \cong C'B'$

Tesi: $A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$

Dimostrazione

La dimostrazione sfrutta i teoremi precedenti oltre al primo criterio e poiché si basa su una costruzione richiede di distinguere i tre casi del triangolo acutangolo, ottusangolo e rettangolo.



Si riporta nel semipiano opposto a C la semiretta As in modo che $B\hat{A}s \cong C'\hat{A}'B'$ e si riporta su As il segmento AC” congruente ad A’C’. Per il I criterio si ha allora $A'\overset{\Delta}{B'}C' \cong A\overset{\Delta}{B}C''$ e da ciò consegue che $C\overset{\Delta}{A}C''$ e $C\overset{\Delta}{B}C''$ sono entrambi isosceli sulla base CC” (proprietà transitiva della congruenza).

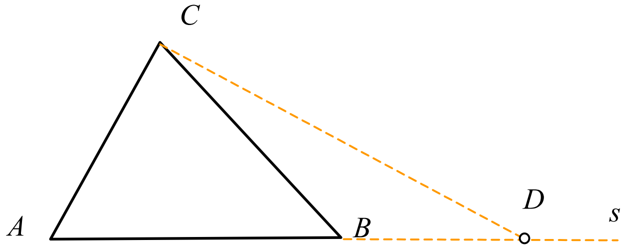
Per il teorema sulla congruenza di angoli alla base in triangoli isosceli e per somma di angoli congruenti si ottiene che $A\hat{C}B \cong A\hat{C}''B$ e dunque per il I criterio $A\overset{\Delta}{B}C \cong A\overset{\Delta}{B}C''$

Ma poiché $A'\overset{\Delta}{B'}C' \cong A\overset{\Delta}{B}C''$ ne segue la tesi per la proprietà transitiva
Fare le altre dimostrazioni per rendersi conto di cosa cambia nella figura e nella argomentazione.

Lemma dell'angolo esterno

Enunciato: *In un generico triangolo qualsiasi angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti*

Nota Bene: si parla di lemma perché esso serve essenzialmente a dimostrare il IV criterio di congruenza e perché, come conseguenza del postulato della parallela vedremo che l’angolo esterno è pari alla somma degli angoli interni non adiacenti



Dati: $A\overset{\Delta}{B}C$, Bs

Ipotesi: $A\hat{B}s \cong \pi$

Tesi: $C\hat{B}s > A\hat{C}B$ e $C\hat{B}s > B\hat{A}C$

Dimostrazione

La dimostrazione inizia col dimostrare che $C\hat{B}s > A\hat{C}B$, infatti la seconda disuguaglianza verrà derivata dalla prima (come vedremo)

Si procede per assurdo. Dalla negazione della tesi segue che $C\hat{B}s \le A\hat{C}B$

Supponiamo che sia $C\hat{B}s \cong A\hat{C}B$ e consideriamo su Bs un segmento BD≅AC; ne consegue che $B\overset{\Delta}{D}C \cong A\overset{\Delta}{B}C$ per il I criterio (BC è in comune) dunque $C\hat{B}A \cong B\hat{C}D$ perché opposti a lati congruenti in triangoli congruenti

Si ha così che $\pi = A\hat{B}D = A\hat{B}C + C\hat{B}D \cong B\hat{C}D + A\hat{C}B = A\hat{C}D$
Ma ciò significa che A, C e D devono essere allineati e cioè che C deve essere allineato con A e B ovvero che il triangolo ABC è degenere.

Se ora si suppone che sia $C\hat{B}s < A\hat{C}B$ si può costruire entro l’angolo $A\hat{C}B$ una semiretta tale che sia $A'\hat{C}B \cong C\hat{B}s$ con A’ interno al segmento AB. Si ripete il ragionamento precedente utilizzando il triangolo $A'\overset{\Delta}{B}C$ e si ottiene il risultato precedente. Dunque non si può negare che sia $C\hat{B}s > A\hat{C}B$.

Per dimostrare che $C\hat{B}s > B\hat{A}C$ basta osservare che se si prolunga CB dalla parte di B si ottiene un angolo esterno opposto al vertice rispetto al precedente e che si trova rispetto all’angolo $B\hat{A}C$ nella stessa posizione in cui si trovava $C\hat{B}s$ rispetto ad $A\hat{C}B$ e dunque si ha ancora $C\hat{B}s > B\hat{A}C$

Corollario: in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono sempre acuti
Indichiamo con α l’angolo esterno e con β gli angoli alla base. Si ha $\alpha > \beta$ ma anche $\alpha + \beta \cong \pi > \beta + \beta = 2\beta$ e dunque $\beta < \frac{1}{2}\pi$

IV criterio di congruenza

Enunciato: *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti un lato e due angoli di cui uno non adiacente.*

Nota Bene: dopo aver dimostrato questo criterio potremo affermare che per dimostrare la congruenza di due triangoli basta che siano congruenti un lato e due angoli (II e IV criterio)

Dati: $A\overset{\Delta}{B}C$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$

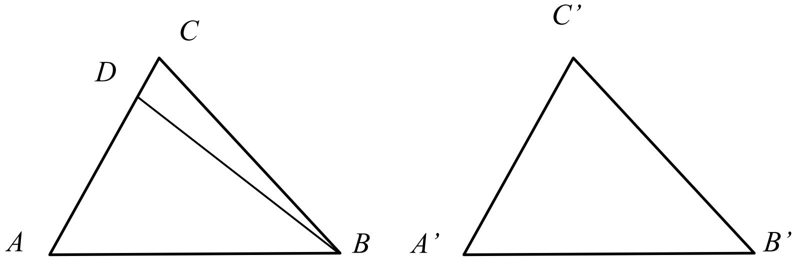
Ipotesi: $AB \cong A'B' \wedge C\hat{A}B \cong C'\hat{A}'B' \wedge A\hat{C}B \cong A'\hat{C}'B'$

Tesi: $A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$

Dimostrazione

Anche questa dimostrazione procede per assurdo ma in essa serve in maniera essenziale il lemma dell'angolo esterno.

Supponiamo che sia AC≠A'C' (se fossero uguali potremmo applicare il I criterio e la congruenza sarebbe dimostrata) e senza rischio di particolarizzazione ipotizziamo che sia AC>A'C'; ma allora esiste D∈AC | AD ≅ A'C'.



Si ha allora per il I criterio che $A\overset{\Delta}{B}D \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$. SE applichiamo il lemma dell'angolo esterno al triangolo $A\overset{\Delta}{B}D$ potremo affermare che $A\hat{D}B > A\hat{C}B$

Si ha allora $A\hat{D}B > A\hat{C}B$ per il lemma dell'angolo esterno

$A\hat{D}B \cong A'\hat{C'}B'$ per la congruenza dei triangoli

e infine $A'\hat{C'}B' \cong A\hat{C}B$ per ipotesi

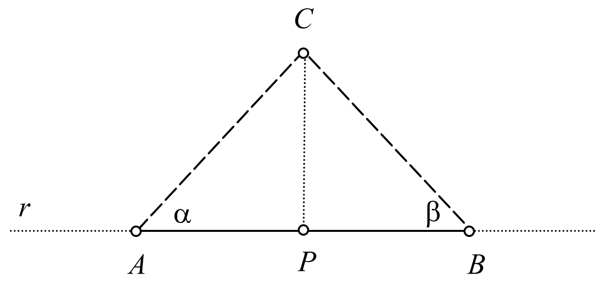
Ne consegue che $A\hat{C}B > A\hat{C}B$ assurdo!

Dunque dobbiamo ammettere che sia AC≅A'C' e la tesi risulta dimostrata.

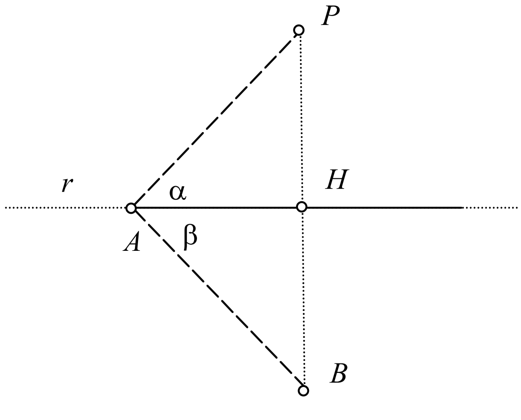
Costruzioni e proprietà notevoli

Vediamo ora che alcune proprietà che vengono solitamente ammesso come postulati sono invece perfettamente dimostrabili attraverso semplici costruzioni e conseguenze dei teoremi precedenti.

- Il punto medio di un segmento esiste ed è unico (basta costruire nei due semipiani angoli congruenti, riportare su di essi segmenti congruenti, congiungere, ed applicare il IV criterio).
- Il teorema precedente consente di definire la mediana e costruirla
- La bisettrice di un angolo esiste ed è unica (sull'angolo si costruisce un triangolo isoscele, si traccia la mediana e si applica il terzo criterio ai due triangoli così determinati; per la eguaglianza degli elementi corrispondenti la mediana risulta essere bisettrice ed altezza)
- Corollario l'angolo retto (metà dell'angolo piatto) esiste e gli angoli retti sono tutti uguali (li indicheremo con ½ π)
- Corollario: in un triangolo isoscele la mediana è bisettrice ed altezza
- Teorema: in un triangolo isoscele la bisettrice è mediana e altezza (I o II criterio)
- Costruzione della perpendicolare per un punto su una retta

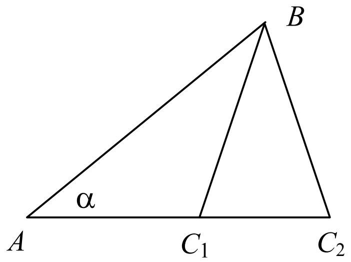
  Sia r una generica retta e P un suo punto. Consideriamo da parti opposte due punti A e B tali che AP ≅ PB. Tracciamo per A una semiretta che definisca l'angolo α e riportiamo in B un angolo β ad esso congruente. Sia C il punto di incontro delle due semirette: CP ⊥ AB infatti il triangolo che abbiamo costruito è isoscele (perché ha due angoli uguali) e PC è la mediana che, come già visto, è altezza.
- Costruzione di una perpendicolare ad una retta per un punto esterno.

  Da P si traccia una retta incidente r in A. Se $P\hat{A}r \cong ½\,\pi$ la costruzione è finita. In caso contrario riportiamo nell'altro semipiano l'angolo β≅α e sulla semiretta che lo definisce consideriamo B | AP≅AB. Uniamo P con B e indichiamo con H la intersezione con r. Il triangolo APB è isoscele per costruzione e inoltre AH sempre per costruzione è la bisettrice; ma la bisettrice è anche altezza

- In un triangolo isoscele l'altezza è bisettrice e mediana: vengono due triangoli congruenti per il IV criterio.
- In un triangolo rettangolo gli altri due angoli sono acuti (conseguenza immediata del lemma dell'angolo esterno applicato all'angolo retto).

V criterio di congruenza



Enunciato: *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e un angolo opposto a condizione che gli altri angoli opposti siano della stessa specie.*

Attenzione la richiesta che l'altro angolo sia della stessa specie (li indicheremo con ~) non è pletorica, infatti, come si vede dalla figura qui a lato, si possono costruire due triangoli diversi $\overset{\Delta}{ABC_1}$ e $\overset{\Delta}{ABC_2}$ con congruenti due lati (AB in comune e $BC_1 \cong BC_2$) e un angolo (α in comune) ma in quel caso i due altri angoli sono rispettivamente acuto e ottuso.

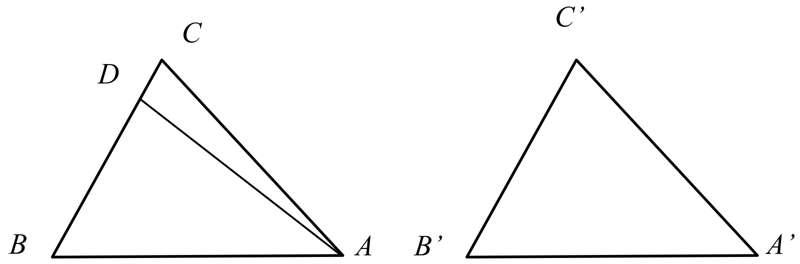
Dati: $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{A'B'C'}$

Ipotesi: $AB \cong A'B' \wedge AC \cong A'C' \wedge C\hat{B}A \cong C'\hat{B'}A' \wedge A\hat{C}B \sim A'\hat{C'}B'$

Tesi: $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$

Dimostrazione

Anche questa dimostrazione procede per assurdo; se i due triangoli non sono congruenti deve essere $CB \neq C'B'$ perché altrimenti i triangoli sarebbero congruenti per il primo e per il terzo criterio.



Supponiamo dunque che sia $CB < C'B'$ e consideriamo D tale che $DB \cong C'B'$. Ne consegue che $\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ (I criterio) e per la proprietà transitiva si ha che $AD \cong AC$ dunque $\overset{\Delta}{ADC}$ è isoscele. Ma per il lemma dell'angolo esterno deve essere $B\hat{D}A > D\hat{C}A \cong A\hat{D}C$. Ma poiché siamo in un triangolo isoscele ciò significa che $B\hat{D}A > \frac{1}{2}\pi$. D'altra parte $B\hat{D}A \cong B'\hat{C}A'$ che è dunque a sua volta ottuso contro l'ipotesi che sia della stessa specie di $B\hat{C}A$ che, facendo parte di un triangolo isoscele, è acuto.

Dunque non si può negare la tesi.